

Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

В.Г. ШЕРВАТОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ
ФУНКЦИИ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА • 1954

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 16

В. Г. ШЕРВАТОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

В. Г. Шерватов, Гиперболические функции

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов*

Корректор *Л. О. Сечейко*.

Сдано в набор 23/VI 1954 г. Подписано к печати 25/VIII 1954 г. Бумага $84 \times 108 \frac{1}{2}$,
Физ. печ. л. 1,43. Условн. печ. л. 2,88. Уч.-изд. л. 2,65. Тираж 25 000 экз. Т-05443
Цена книги 80 к. Заказ № 1528.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической
промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая брошюра содержит элементарное изложение теории так называемых «гиперболических функций», во многом аналогичных обыкновенным тригонометрическим функциям. Гиперболические функции часто встречаются в разнообразных физических и технических исследованиях; весьма важную роль играют они также в неевклидовой геометрии Лобачевского, участвуя во всех тригонометрических зависимостях этой геометрии (см., например, книгу А. П. Нордена «Элементарное введение в геометрию Лобачевского», М., Гостехиздат, 1953; по содержанию глава IX этой книги близка к настоящей брошюре). Но и независимо от этих приложений теория гиперболических функций может представлять значительный интерес для школьника и учителя средней школы, так как аналогия между гиперболическими и тригонометрическими функциями по-новому освещает многие вопросы тригонометрии.

Брошюра состоит из трех глав. Первая глава посвящена гиперболическому повороту и его применению к изучению свойств гиперболы; она может представлять и известный самостоятельный интерес. Основное место занимает глава II, в которой излагаются элементы теории гиперболических функций. Глава III тесно связана с брошюрой А. И. Маркушевича «Площади и логарифмы», составляющей вып. 9 «Популярных лекций по математике»; она устанавливает связь теории гиперболических функций с теорией логарифмов.

Иное построение теории гиперболических функций, не использующее гиперболического поворота, содержится в статье Д. И. Перепелкина «Геометрическая теория гиперболических функций», напечатанной в вып. 2 сборника «Математическое просвещение», ОНТИ, М.—Л., 1934; к сожалению, в настоящее время этот сборник представляет собой библиографическую

редкость. Читателю брошюры можно порекомендовать также книгу Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова «Аналитическая геометрия», ч. 1, Гостехиздат, М. — Л., 1948, где содержится обширный материал, примыкающий к изложенному в первой главе.

Брошюра рассчитана на участников и руководителей школьных математических кружков; она может быть также использована и в работе вузовских кружков по математике. Мелким шрифтом в главе III напечатан более трудный материал, не рассчитанный на школьника. Впрочем, нигде у читателя не предполагается никаких знаний, выходящих за пределы курса средней школы.

Автор выражает искреннюю признательность И. М. Яглому, помощь и указания которого сыграли значительную роль при написании брошюры.

В. Г. Шерватов.

ГЛАВА I

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПОВОРОТ

§ 1. Сжатие к прямой

Часто при решении геометрических задач на построение применяется преобразование сжатия к точке (это преобразование называется также гомотетией или центрально-подобным преобразованием). Сжатие к точке



а)



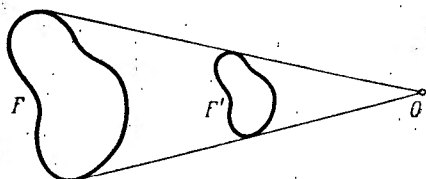
б)

Черт. 1.

O (называемой центром сжатия) с коэффициентом сжатия k состоит в том, что каждая точка A плоскости переходит в точку A' , которая лежит на луче OA , причем $\frac{OA'}{OA} = k$, т. е. $OA' = k \cdot OA$ (черт. 1, а, б). Если коэффициент сжатия k больше 1, то $OA' > OA$ (черт. 1, б); в этом случае преобразование следовало бы называть «расширением от O ». Сама точка O при сжатии к O остается на месте.

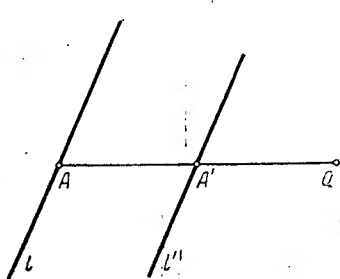
Всякая фигура F переходит при сжатии к точке O в фигуру F' , подобную первоначальной с центром подобия O и коэффициентом подобия k (черт. 2). Если $k < 1$, то фигура при этом уменьшается, а если $k > 1$, фигура увеличивается.

Всякая прямая при сжатии к точке переходит в прямую (черт. 3а); параллельные прямые переходят в параллельные (черт. 3б). Всякая окружность при сжатии к точке переходит в окружность (черт. 3в).

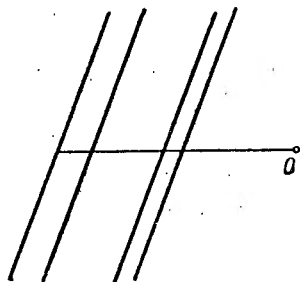


Черт. 2.

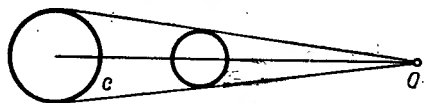
Все отрезки плоскости при сжатии к точке уменьшаются (или увеличиваются) в постоянном отношении k . Площади всех фигур тоже уменьшаются (или увеличиваются) в постоян-



Черт. 3а.



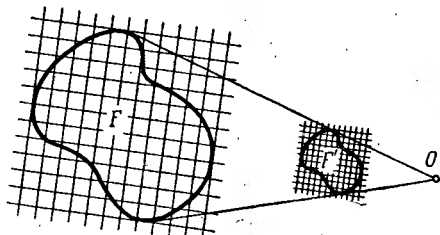
Черт. 3б.



Черт. 3в.

ном отношении, равно k^2 — квадрату коэффициента сжатия. Действительно, пусть F есть плоская фигура. Рассмотрим еще какую-то сеть мелких квадратов плоскости (черт. 4). Площадь F приближенно равна числу квадратов, попавших внутрь F , умноженному на площадь квадрата; ошибка будет тем меньше, чем мельче квадраты сетки. Выбирая квадраты достаточно малыми, можно сделать ошибку меньше любого (сколь угодно малого!) числа ϵ . При сжатии к точке сеть квадратов переходит в но-

вую сеть квадратов, а фигура F — в фигуру F' , внутри которой будет заключаться столько же квадратов новой сети (более мелких, если $k < 1$, и более крупных, если $k > 1$), сколько квадратов первоначальной сети помещалось внутри F . Площадь F' приближенно равна числу заключенных внутри нее квадратов, умноженных на площадь квадрата. Но площадь каждого нового квадрата равна площади первоначаль-

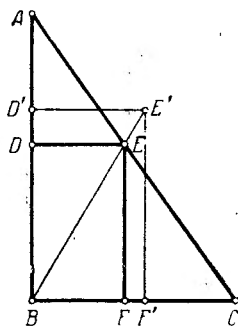


Черт. 4.

ного квадрата, умноженной на k^2 (так как длина стороны квадрата умножается на k). Поэтому площадь F' будет равна площади F , умноженной на k^2 .

В качестве примера применения сжатия к точке разберем решение следующей задачи на построение: *вписать в данный прямоугольный треугольник ABC прямоугольник $BDEF$ с данным отношением сторон* (черт. 5).

Построим сначала произвольный прямоугольник $BD'E'F'$ с данным отношением сторон так, чтобы вершины D' и F' лежали соответственно на сторонах AB и BC . Обозначим через E точку пересечения луча BE' и стороны AC треугольника. Легко видеть, что сжатие с центром B и коэффициентом сжатия $k = \frac{BE}{BE'}$ переводит прямоугольник $BD'E'F'$ в искомый прямоугольник $BDEF$. Пользуясь этим, легко построить этот прямоугольник¹⁾.

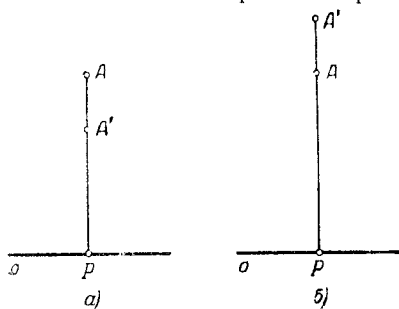


Черт. 5.

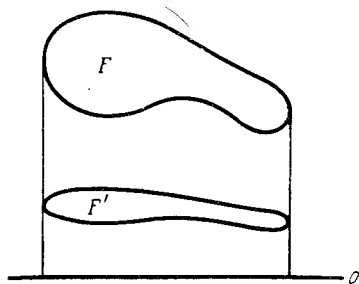
Иногда в геометрии оказывается удобным применить другое преобразование — сжатие к прямой. Сжатие к прямой o (называемой осью сжатия) с коэффициентом сжатия k

¹⁾ Аналогично можно решать задачу и в том случае, когда данный треугольник ABC — не прямоугольный. Мы на этом не останавливаемся.

состоит в том, что каждая точка A плоскости переходит в точку A' , которая лежит на луче PA , перпендикулярном к o , причем $\frac{PA'}{PA} = k$ или $PA' = k \cdot PA$ (черт. 6 а, б). Если коэффициент сжатия k больше 1, то $PA' > PA$ (черт. 6, б); в этом случае преобразование следовало бы называть «расширением от o ». Все точки прямой o при сжатии к o остаются на месте.



Черт. 6.



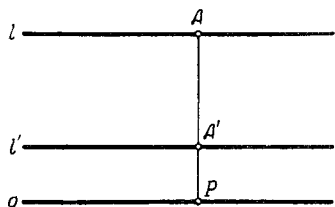
Черт. 7.

При сжатии к прямой фигура F переходит в новую фигуру F' , уже не подобную F (черт. 7).

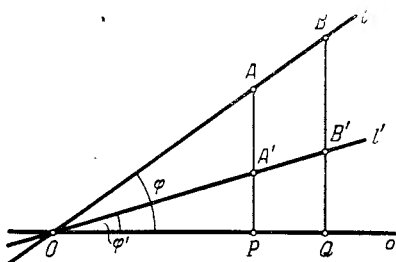
Сжатие к прямой обладает рядом свойств, аналогичных свойствам сжатия к точке. А именно:

а) При сжатии к прямой всякая прямая переходит в прямую.

Если прямая l параллельна o и отстоит от нее на расстоянии d , то она переходит в прямую l' , тоже параллельную o и отстоящую от нее на расстоянии kd (черт. 8а).



Черт. 8а.



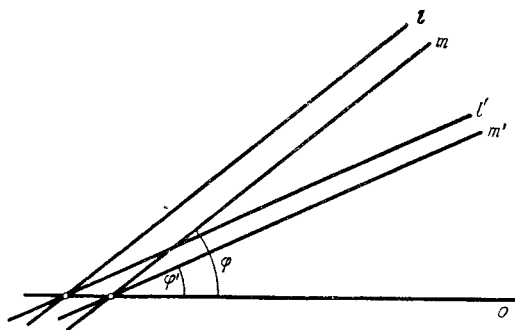
Черт. 8б.

Пусть l не параллельна o ; точку пересечения l и o обозначим через O (черт. 8б). При сжатии к прямой o точка O остается на месте. Пусть A — произвольная точка прямой l

(отличная от O), A' — точка, в которую переходит A при сжатии к o ; $PA' = k \cdot PA$. Возьмем на прямой l другую точку B ; если B' есть точка пересечения перпендикуляра BQ , опущенного из B на прямую o , с прямой OA' , то $\frac{B'Q}{BQ} = \frac{A'P}{AP} = k$ (следует из подобия треугольников OQB и OPA , OQB' и OPA') или $QB' = k \cdot QB$. Отсюда видно, что при сжатии к o точка B переходит в точку B' . Так как B — произвольная точка прямой l , то эта прямая при сжатии к o переходит в прямую OA' (которую естественно обозначать через l').

б) При сжатии к прямой параллельные прямые переходят в параллельные.

Пусть прямые l и m параллельны; тогда они не имеют общей точки. Но в таком случае и прямые l' и m' , в которые переходят первоначальные прямые, тоже не имеют общей



Черт. 9.

точки (которая могла бы получиться только из общей точки прямых l и m); значит, эти прямые тоже параллельны (черт. 9)¹⁾.

в) При сжатии к прямой сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

¹⁾ Если φ и φ' — углы, образованные исходной прямой l и преобразованной прямой l' с осью сжатия o , то из черт. 8б легко следует:

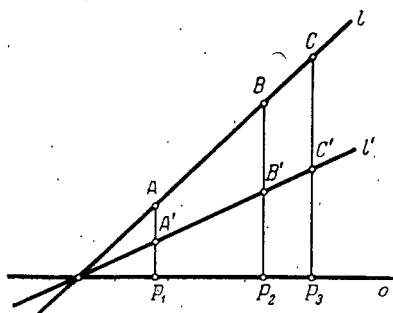
$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{PA'}{PO} = \frac{k \cdot PA}{PO} = k \frac{PA}{PO} = k \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда также следует, что параллельные прямые, пересекающие o под одинаковым углом φ , переходят в параллельные прямые (пересекающие o под одинаковым углом φ').

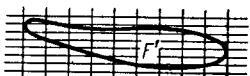
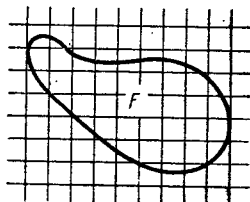
Действительно, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ по свойству параллельных прямых, пересекающих лучи пучка (черт. 10).

г) При сжатии к прямой площади всех фигур изменяются в постоянном отношении (равном коэффициенту сжатия k).

Рассмотрим фигуру F и сетку из мелких квадратов; тогда площадь F приближенно равна числу квадратов, заключенных внутри F , умноженному на площадь квадрата (черт. 11).

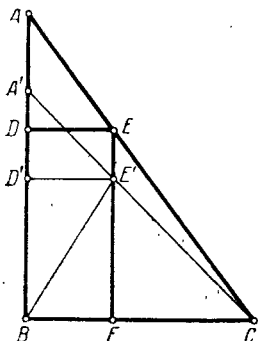


Черт. 10.



Черт. 11.

Будем считать, что одно из направлений линий сетки параллельно оси сжатия. При сжатии сетка квадратов перейдет в сетку равных прямоугольников, площадь каждого из которых равна площади квадрата, умноженной на k (одна сторона квадрата остается неизменной, а длина второй умножается на k). Далее рассуждение не отличается от доказательства того, что при сжатии к точке с коэффициентом k все площади изменяются в k^2 раз (см. выше, стр. 6—7).



Черт. 12.

В качестве примера использования сжатия к прямой разберем решение следующей задачи на построение¹⁾: вписать в данный прямоугольный треугольник ABC прямоугольник BDEF

¹⁾ Сравните с задачей на стр. 7.

с данным произведением сторон $BD \cdot BF = d^2$ (т. е. прямоугольник данной площади) (черт. 12). Для решения сожмем треугольник ABC к стороне BC с коэффициентом сжатия $k = \frac{BC}{BA}$; тогда этот треугольник перейдет в равнобедренный прямоугольный треугольник $A'BC$, в котором $BA' = k \cdot BA = \frac{BC}{BA} \cdot BA = BC$ и площадь которого равна kS (где S — площадь треугольника ABC). Прямоугольник $BDEF$ перейдет при этом сжатии в прямоугольник $BD'E'F$ площади kd^2 (в силу свойства г)). Теперь нам нужно в равнобедренный прямоугольный треугольник $A'BC$ вписать прямоугольник $BD'E'F$ известной площади kd^2 .

Это сделать нетрудно, ибо

$$S_{BFE'D'} = S_{\triangle BCA'} - (S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'})$$

и, следовательно,

$$S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} = S_{\triangle BCA'} - S_{BFE'D'} = kS - kd^2.$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} &= \frac{1}{2} FE'^2 + \frac{1}{2} D'E'^2 = \\ &= \frac{1}{2} (FE'^2 + D'E'^2) = \frac{1}{2} BE'^2 \end{aligned}$$

(здесь используется то, что треугольник $A'BC$, а следовательно, и подобные ему треугольники $A'D'E'$ и $E'FC$ — равнобедренные). Таким образом, мы получим:

$$\frac{1}{2} BE'^2 = kS - kd^2.$$

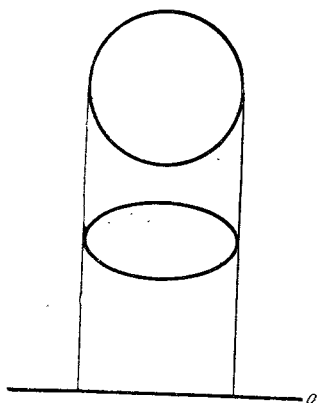
Теперь, зная длину отрезка BE' , мы без труда найдем точку E' , после чего сразу строится прямоугольник $BD'E'F$, вписанный в треугольник $A'BC$, и прямоугольник $BDEF$, вписанный в треугольник ABC .

В зависимости от величины d задача может иметь два, одно или ни одного решения.

Геометрическое решение этой задачи, не использующее сжатия к прямой, неизвестно¹⁾.

¹⁾ Аналогично можно решить задачу, и в том случае, когда данный треугольник ABC не прямоугольный. Мы на этом не останавливаемся.

В противоположность сжатию к точке сжатие к прямой не переводит окружность в окружность. Окружность переходит при сжатии к прямой в иную кривую, называемую эллипсом (черт. 13). Используя свойства а) — г) преобразования сжатия к прямой, можно вывести ряд геометрических свойств эллипса; однако это выходит за рамки настоящей брошюры.



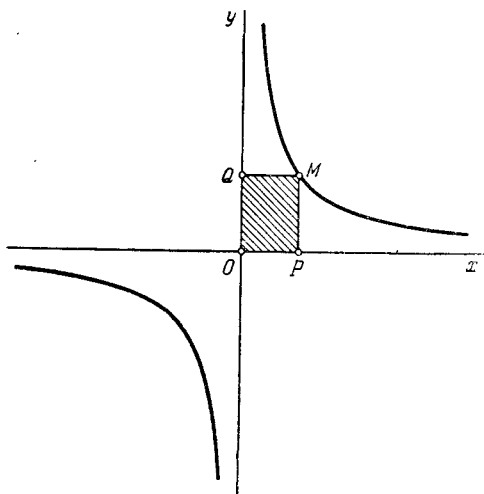
Черт. 13.

§ 2. Гиперболический поворот

В дальнейшем изложении большую роль будет играть график обратной пропорциональной зависимости, т. е. кривая, уравнение которой имеет вид:

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{или} \quad xy = a.$$

Эта кривая называется гиперболой. Она изображена на черт. 14.



Черт. 14.

Очевидно, что чем больше по абсолютной величине x , тем меньше y , и наоборот: если $x \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$, если $y \rightarrow \infty$, то $x \rightarrow 0$. Геометрически это означает, что гипер-

бола неограниченно приближается к координатным осям, никогда с ними не пересекаясь (из уравнения $xu = a$ следует, что ни x , ни y не могут равняться нулю).

Прямая, к которой некоторая кривая неограниченно приближается, не достигая ее, называется асимптотой этой кривой. Таким образом, оси координат являются асимптотами гиперболы.

Гипербола состоит из двух ветвей, которые при $a > 0$ расположены в I квадранте системы координат (x и y положительны) и в III квадранте (x и y отрицательны).

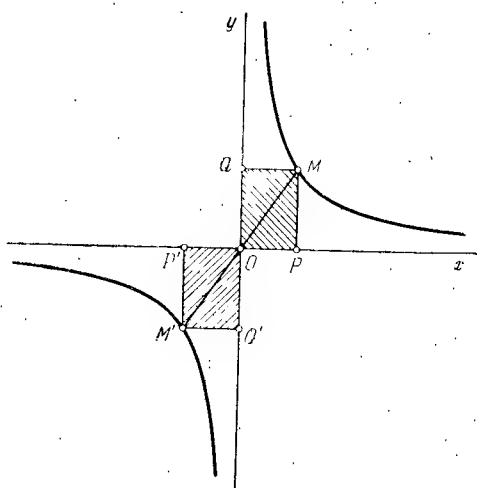
Уравнение $xu = a$ имеет простой геометрический смысл: площадь прямоугольника $MQOP$, ограниченного осями координат и прямыми, проведенными через какую-либо точку M гиперболы параллельно осям координат (черт. 14), равна a , т. е. не зависит от выбора точки M . Действительно, очевидно, $OP = x$, $PM = y$ и

$$S_{MQOP} = OP \cdot PM = x \cdot y = a.$$

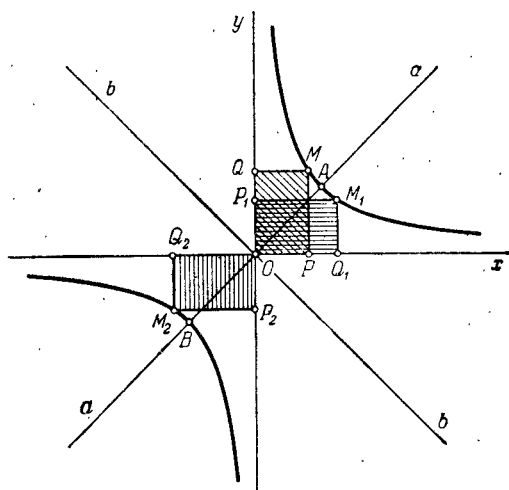
Если назвать прямоугольник $MQOP$ координатным прямоугольником точки M , то можно сказать, что гипербола есть геометрическое место точек, лежащих в I и в III квадрантах системы координат, координатные прямоугольники которых имеют постоянную площадь.

Гипербола имеет центр симметрии: обе ветви гиперболы симметричны друг другу относительно начала координат O . Доказательство этого утверждения следует из того, что симметричные относительно O координатные прямоугольники $MQOP$ и $M'Q'OP'$ (черт. 15) имеют равные площади. Гипербола имеет также две оси симметрии, которыми служат биссектрисы координатных углов aa и bb (черт. 16). Действительно, симметричные относительно aa координатные прямоугольники $MQOP$ и $M_1Q_1OP_1$ имеют равные площади; также и симметричные относительно bb координатные прямоугольники $MQOP$ и $M_2Q_2OP_2$ имеют равные площади. Центр симметрии O и оси симметрии aa и bb часто называют просто центром и осями гиперболы; точки A и B , в которых гипербола пересекается с осью aa , называют вершинами гиперболы.

Пусть мы имеем гиперболу $xu = a$. Произведем сжатие плоскости к оси x с коэффициентом сжатия k . При этом гипербола $xu = a$ перейдет в гиперболу $xu = ak$, ибо абсцисса x каждой точки останется без изменения, а



Черт. 15.

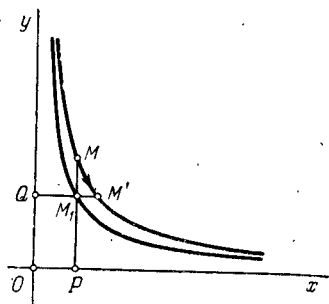


Черт. 16.

ордината y заменится на $y \cdot k$ (черт. 17). Затем произведем еще одно сжатие к оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. При этом гипербола $xy = ak$ перейдет в гиперболу $xy = \frac{ak}{k} = a$: ордината y любой точки при новом сжатии к оси не меняется, а абсцисса x переходит в $\frac{x}{k}$. Таким образом, мы

видим, что *последовательное сжатие плоскости к оси x с коэффициентом k и к оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$*

переводит гиперболу $xy = a$ в себя. Последовательность этих двух сжатий плоскости к прямой образует преобразование, называемое гиперболическим поворотом. Название «гиперболический поворот» связано с тем, что при таком преобразовании все



Черт. 17.

точки гиперболы «скользят по кривой»; так, на черт. 17 точка M сначала переходит в точку M_1 , а затем точка M_1 переходит в точку M' , т. е. окончательно гиперболический поворот переводит точку M гиперболы в точку M' той же гиперболы. Это положение аналогично вращению окружности — гипербола как бы «поворачивается».

Отметим следующие свойства гиперболического поворота:

а) *при гиперболическом повороте всякая прямая переходит в прямую (следствие свойства а) § 1);*

б) *при гиперболическом повороте оси координат (асимптоты гиперболы) переходят сами в себя (ибо они переходят в себя при каждом из двух сжатий, которые образуют гиперболический поворот);*

в) *при гиперболическом повороте параллельные прямые переходят в параллельные (следствие свойства б) § 1);*

г) *при гиперболическом повороте сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой (следствие свойства в) § 1);*

д) *при гиперболическом повороте сохраняются площади фигур (ибо при первом сжатии к прямой площади всех фигур умножаются на k , а при втором — делятся на k ; см. свойство г) § 1).*

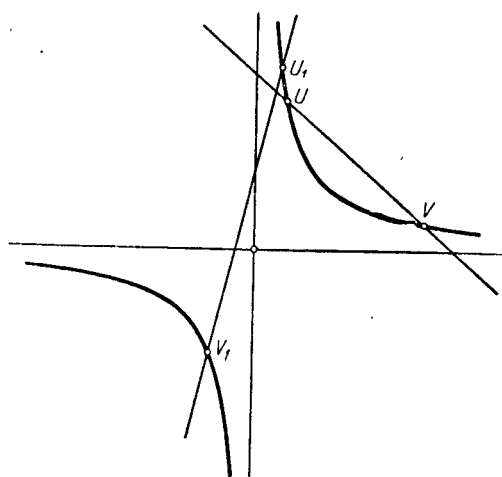
Очень важно заметить, что *при помощи гиперболического поворота можно перевести каждую точку гиперболы в любую другую*. Действительно, первое сжатие переводит точку (x, y) гиперболы $xy = a$ в точку (x, yk) гиперболы $xy = ak$; второе сжатие переводит точку (x, yk) гиперболы $xy = ak$ в точку $\left(\frac{x}{k}, yk\right)$ первоначальной гиперболы (см. черт. 17). Таким образом, в результате гиперболического поворота точка (x, y) переходит в точку $\left(\frac{x}{k}, yk\right)$. Отсюда и вытекает, что при помощи подходящего гиперболического поворота можно точку (x, y) гиперболы перевести в любую другую точку (x_1, y_1) той же гиперболы: для этого достаточно выбрать k так, чтобы было $x_1 = \frac{x}{k}$ или $k = \frac{x}{x_1}$.

§ 3. Несколько свойств гиперболы

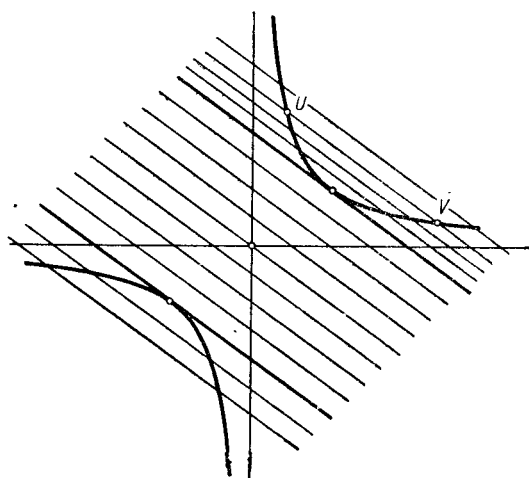
Используя гиперболический поворот, можно доказать ряд интересных геометрических свойств гиперболы. Однако предварительно мы определим, что называется хордой и касательной гиперболы.

Прямая, пересекающая гиперболу в двух точках, называется секущей гиперболы; отрезок секущей, концами которой служат точки гиперболы, называется хордой гиперболы. Секущие гиперболы (так же как и хорды) бывают двух родов; секущие первого рода пересекают лишь одну ветвь гиперболы, а секущие второго рода — обе ветви (черт. 18а). Рассмотрим какую-нибудь секущую первого рода. Среди прямых, параллельных этой секущей, будут такие, которые пересекают гиперболу в двух точках; будут прямые, совсем не пересекающие гиперболу; наконец, две из этих прямых, называемые касательными к гиперболе, будут иметь с гиперболой одну общую точку (черт. 18б)¹⁾. При гиперболическом повороте хорда UV гиперболы переходит в новую хорду $U'V'$, причем если U и V — точки одной ветви (разных ветвей) гиперболы, то U' и V' тоже принадлежат одной ветви (разным ветвям). Действительно, точки U и V гиперболы

¹⁾ Касательную к гиперболе можно также определить как прямую, имеющую с гиперболой одну общую точку, не параллельную асимптоте (всякая прямая, параллельная асимптоте, пересекает гиперболу в единственной точке, но не является касательной).



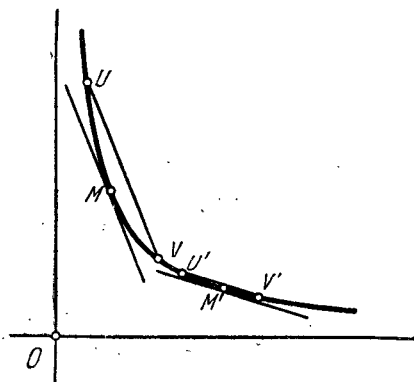
Черт. 18а.



Черт. 18б.

переходят в точки U' и V' , где, например, U' принадлежит той же ветви, что и U (черт. 19).

Касательная гиперболы в какой-либо точке M при гиперболическом повороте, переводящем M в M' , переходит в касательную в точке M' (для доказательства рассмотрим



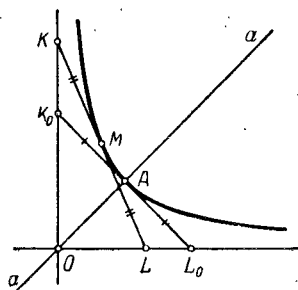
Черт. 19.

хорду UV , параллельную первой касательной; она перейдет в хорду $U'V'$, а прямая, параллельная UV и имеющая с гиперболой единственную общую точку M , перейдет в прямую, параллельную $U'V'$ и имеющую с гиперболой единственную общую точку M' ; черт. 19).

Перейдем теперь к доказательству свойств гиперболы.

1. *Отрезок касательной к гиперболы, заключенный между асимптотами кривой, делится в точке касания пополам.*

Так как биссектриса aa осев симметрии гиперболы (черт. 20), то отрезок K_0L_0 касательной в



Черт. 20.

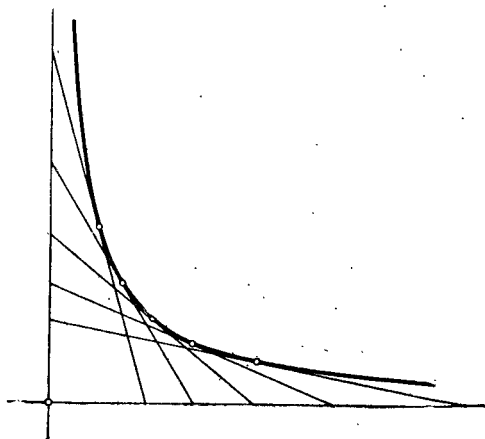
вершине A , заключенный между осями координат, делится в точке A пополам: отрезки AK_0 и AL_0 переходят друг в друга при симметрии относительно оси aa . Пусть теперь KL есть отрезок касательной к гиперболы в какой-либо другой ее точке M . Произведем гиперболический поворот, перево-

двигая точку M в точку A . При этом касательная в точке M перейдет в касательную в точке A . Далее отрезок KL перейдет в отрезок K_0L_0 (см. свойства а) и б) § 2). А так как при гиперболическом повороте середина отрезка переходит в середину отрезка (см. свойство г) § 2), то M есть середина отрезка KL , что и требовалось доказать.

2. *Площадь треугольника, отсекаемого касательной к гиперболе $xy=a$ от координатного угла, одна и та же для всех касательных.*

Для доказательства рассмотрим треугольник KOL , отсекаемый от координатного угла касательной к гиперболе $xy=a$ в какой-либо ее точке M (черт. 20). Гиперболический поворот, переводящий точку M в точку A , переводит треугольник KOL в треугольник K_0OL_0 , где K_0L_0 — касательная к гиперболе в точке A . Отсюда в силу свойства д) § 2 имеем $S_{\Delta KOL} = S_{\Delta K_0OL_0}$, т. е. площадь треугольника KOL не зависит от выбора точки M , что и требовалось доказать.

Из свойств 1 и 2 вытекает, что одну ветвь гиперболы можно определить как геометрическое место середин отрезков, отсекающих равные площади от данного прямого угла (черт. 21).



Черт. 21.

3. *Средины всех параллельных между собой хорд гиперболы лежат на одной прямой, проходящей через центр гиперболы.*

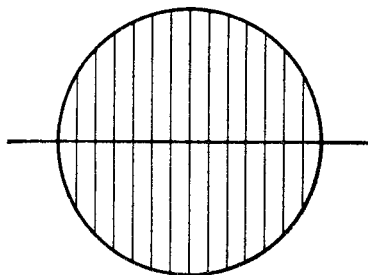
в ось aa гиперболы, хорда UV перейдет в хорду U_0V_0 , которая делится осью симметрии aa пополам. Но это возможно

20

только в том случае, если $U_0V_0 \perp aa$. Действительно, пусть U_0V_0 не перпендикулярна к aa . Проведем хорды U_0Z и V_0W , перпендикулярные к aa . Так как aa — ось симметрии гиперболы, то $U_0ZV_0W_0$ — равнобочная трапеция, имеющая ось симметрии aa . Но ось симметрии равнобочной трапеции не может делить пополам ее диагональ (так, на черт. 22б $V_0S_0 = S_0R < S_0U_0$), что и приводит к противоречию. Все хорды, параллельные UV , переходят в хорды, параллельные U_0V_0 , т. е. перпендикулярные к оси симметрии aa гиперболы; середины всех этих хорд лежат на прямой aa . Отсюда следует, что середины всех хорд, параллельных UV , лежат на прямой OT , что и требовалось доказать.

Всякая прямая, проходящая через центр гиперболы, называется диаметром гиперболы (аналогично тому, как диаметры окружности — это прямые, проходящие через ее центр)¹⁾. Диаметр гиперболы, делящий пополам все хорды данного направления, называют сопряженным этим хордам; обратно, хорды называют сопряженными диаметру, делящему их пополам. Впоследствии мы также будем говорить о радиусах гиперболы, понимая под этим отрезок диаметра, идущий от центра гиперболы до точки пересечения диаметра с гиперболой (т. е. радиусы гиперболы определяются аналогично радиусам окружности).

Отметим, что окружность также обладает свойством, аналогичным свойству 3 гиперболы: *середины всех параллельных между собой хорд окружности лежат на одной прямой, проходящей через центр окружности* (а именно, на диаметре окружности, перпендикулярном к хордам, черт. 23).



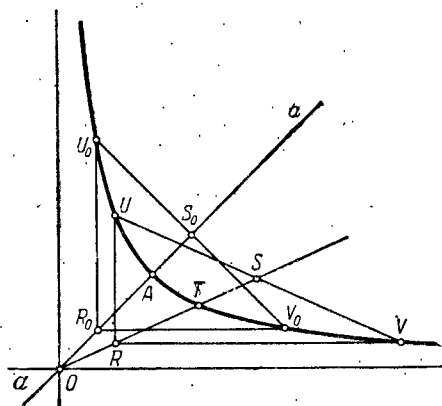
Черт. 23.

4. *Прямые, проведенные через концы произвольной хорды гиперболы параллельно асимптотам, пересекаются на диаметре, сопряженном этой хорде.*

Пусть UV — произвольная хорда гиперболы; S — ее середина, T — точка пересечения прямой OS с гиперболой

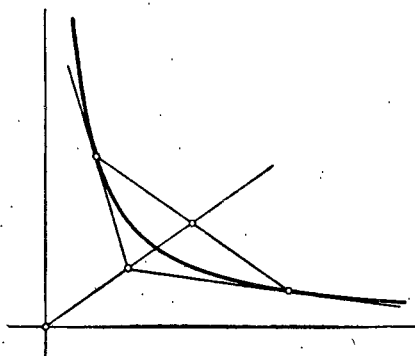
¹⁾ В данной брошюре под диаметром понимается вся прямая, а не отрезок ее.

(черт. 24). Произведем гиперболический поворот, переводящий точку T в вершину A гиперболы. При этом хорда UV перейдет в хорду U_0V_0 , перпендикулярную к оси aa (см. доказательство свойства 3). Прямые UR и VR , параллельные



Черт. 24.

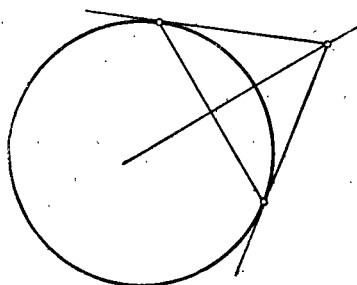
асимптотам, переходят в прямые U_0R_0 и V_0R_0 , параллельные асимптотам (см. свойства б) и в) § 2). Так как aa есть ось симметрии гиперболы и биссектриса угла между асимптотами, то точка R_0 пересечения прямых U_0R_0 и V_0R_0 лежит на aa . Отсюда следует, что точка R пересечения прямых UR и VR лежит на диаметре OT , что и требовалось доказать.



Черт. 25а.

5. Касательные к гиперболе в концах произвольной хорды пересекаются на диаметре, сопряженном этой хорде (черт. 25а).

Доказательство свойства 5 гиперболы, совершенно аналогичное доказательству свойства 4, предоставляем читателю.



Черт. 256.

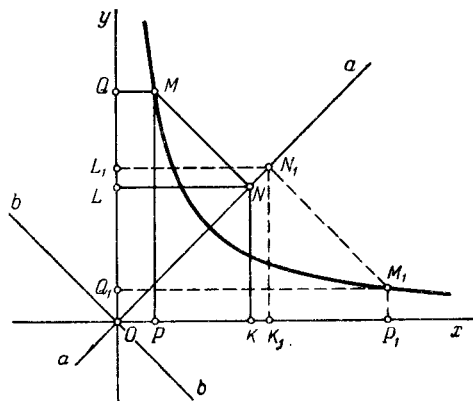
Отметим, что и окружность обладает аналогичным свойством: касательные к окружности в концах произвольной хорды пересекаются на диаметре окружности, перпендикулярном к этой хорде (черт. 256).



ГЛАВА II ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Уравнение гиперболы, отнесенной к осям

Пусть попережнему координаты точки M гиперболы в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, будут x и y , так что уравнение гиперболы будет иметь вид $xy=a$ (черт. 26). Примем оси aa и bb гиперболы за но-



Черт. 26.

вые оси координат; координаты точки M относительно новой системы координат обозначим через X и Y . Выразим старые координаты x и y через новые X и Y .

Обозначим проекцию точки M на ось aa через N ; проекции точек M и N на оси Ox , Oy обозначим соответственно через P , Q и K , L (черт. 26). Тогда

$$\begin{aligned} OP = OK - PK &= ON \cos 45^\circ - NM \cos 45^\circ, \\ OQ = OL + LQ &= ON \cos 45^\circ + NM \cos 45^\circ \end{aligned}$$

(ибо проекция отрезка на прямую, составляющую с направлением отрезка угол 45° , равна длине отрезка, умноженной на $\cos 45^\circ$). Но $OP = x$, $OQ = y$, $ON = X$, $NM = Y$, и мы получим¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= (X - Y) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= (X + Y) \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Подставим в формулу $xy = a$ полученные значения x и y . Мы будем иметь:

$$(X^2 - Y^2) \frac{1}{2} = a \text{ или } X^2 - Y^2 = 2a.$$

Это и есть уравнение гиперболы, отнесенной к осям.

Гипербола

$$X^2 - Y^2 = 1$$

называется единичной гиперболой; ее уравнение аналогично уравнению единичной окружности²⁾ (окружность радиуса единица)

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Уравнение единичной гиперболы в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, имеет вид

$$xy = \frac{1}{2}$$

(в этом случае $2a = 1$ и, следовательно, $a = \frac{1}{2}$).

¹⁾ Для точки M_1 (черт. 26) имеем:

$$\begin{aligned} x_1 = OP_1 = OK_1 + K_1P_1 &= ON_1 \cos 45^\circ + N_1M_1 \cos 45^\circ = \\ &= X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + (-Y_1) \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

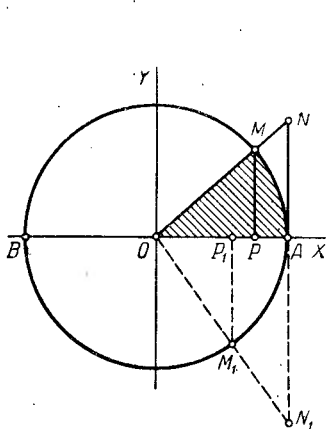
$$\begin{aligned} y_1 = OQ_1 = OL_1 - Q_1L_1 &= ON_1 \cos 45^\circ - N_1M_1 \cos 45^\circ = \\ &= X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - (-Y_1) \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

т. е. те же самые формулы (*). Предоставляем читателю самому проверить, что те же формулы сохраняют силу и для точек второй ветви гиперболы, расположенной в III квадранте старой системы координат (впрочем, это обстоятельство нам нигде не понадобится).

²⁾ Пусть M — произвольная точка окружности радиуса 1 с центром в начале координат (черт. 27а), (X, Y) — ее координаты. По теореме Пифагора имеем: $OP^2 + PM^2 = OM^2$, но $OP = X$, $PM = Y$, $OM = 1$, следовательно, для произвольной точки окружности имеет место равенство $X^2 + Y^2 = 1$.

§ 2. Определение и основные свойства гиперболических функций

Приступим теперь непосредственно к построению теории гиперболических функций (или также — гиперболических тригонометрических функций), во многом аналогичной теории обычных (круговых) тригонометрических функций. Для того чтобы подчеркнуть аналогию между круговыми и гиперболическими функциями, мы почти все время будем вести изложение двумя столбцами: слева мы будем перечислять известные положения из теории круговых тригонометрических функций, а справа излагать теорию гиперболических функций.

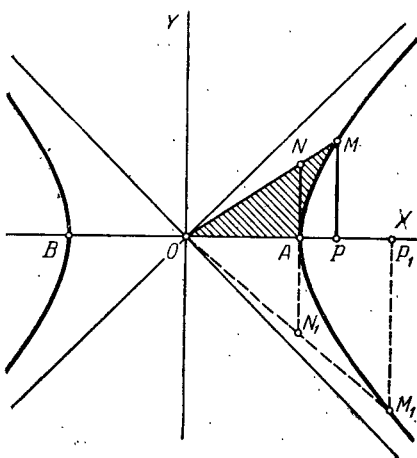


Черт. 27а.

Рассмотрим единичную окружность (черт. 27а)

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Углом α (в радианной мере) между радиусами OA и OM окружности называется число, равное длине дуги AM или равное удвоенной площади



Черт. 27б.

Рассмотрим единичную гиперболу (черт. 27б)

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Гиперболическим углом t между двумя радиусами OA и OM гиперболы называется число, равное удвоенной площади сектора, ограниченного

сектора OAM , ограниченного этими радиусами и дугой окружности.

Опустим из точки M окружности перпендикуляр MP на диаметр OA ; в точке A проведем касательную к окружности до пересечения с диаметром OM в точке N . Отрезок PM перпендикуляра есть линия синуса, отрезок OP диаметра — линия косинуса и отрезок AN касательной — линия тангенса.

Длины отрезков PM , OP и AN соответственно равны синусу, косинусу и тангенсу угла α :

$$PM = \sin \alpha, \quad OP = \cos \alpha, \\ AN = \operatorname{tg} \alpha.$$

этим радиусами и дугой гиперболы¹⁾.

Опустим из точки M гиперболы перпендикуляр MP на диаметр OA — ось симметрии гиперболы, пересекающую гиперболу в вершине A ; в точке A проведем касательную к гиперболе до пересечения с диаметром OM в точке N . Отрезок PM перпендикуляра называется линией гиперболического синуса, отрезок OP диаметра — линией гиперболического косинуса и отрезок AN касательной — линией гиперболического тангенса. Длины отрезков PM , OP и AN называются соответственно гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом и гиперболическим тангенсом гиперболического угла t и обозначаются²⁾

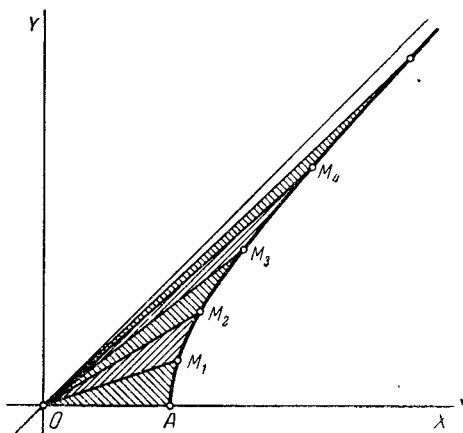
$$PM = \operatorname{sh} t, \quad OP = \operatorname{ch} t, \\ AN = \operatorname{th} t.$$

Известно, что тригонометрические функции угла изменяются периодически с периодом 2π . В противоположность этому гиперболические функции не периодичны.

1) Основное свойство угла α состоит в том, что α не меняется при повороте сектора AOM вокруг O . Аналогично этому гиперболический угол t не меняется при гиперболическом повороте фигуры AOM (см. свойство д) § 2, гл. I).

2) Отношения $\frac{1}{PM}$, $\frac{1}{OP}$ и $\frac{1}{AN}$ иногда называют гиперболическим косекансом, гиперболическим секансом и гиперболическим котангенсом гиперболического угла t .

Гиперболический угол t может изменяться от 0 до ∞ . Для того чтобы это доказать (т. е. доказать, что площадь гиперболического сектора AOM может быть сколь угодно велика), рассмотрим какой-либо гиперболический угол AOM_1 , величину которого мы обозначим через t_1 . Произведем гиперболический поворот, переводящий точку A в точку M_1 ; пусть при этом точка M_1 переходит в M_2 , M_2 — в M_3 , M_3 — в M_4 и т. д. (черт. 28). В силу свойства д) § 2 гл. I площади



Черт. 28.

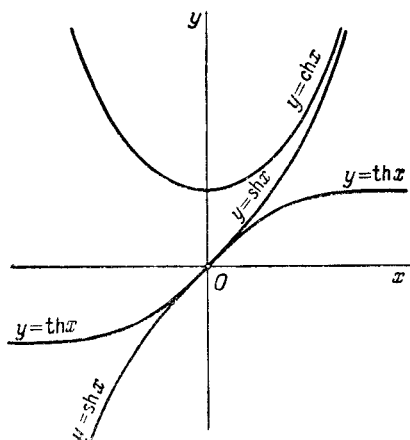
гиперболических секторов AOM_1 , M_1OM_2 , M_2OM_3 , M_3OM_4 , ... равны между собой, следовательно, гиперболические углы AOM_1 , AOM_2 , AOM_3 , AOM_4 , ... соответственно равны t_1 , $2t_1$, $3t_1$, $4t_1$, ... Отсюда и вытекает, что гиперболический угол может быть сколь угодно велик.

Из определения гиперболических функций (черт. 276) легко видеть, что при изменении гиперболического угла t от 0 до ∞ $\text{sh } t$ изменяется от 0 до ∞ , $\text{ch } t$ изменяется от 1 до ∞ и $\text{th } t$ изменяется от 0 до 1. Если в полной аналогии с круговыми функциями считать угол AOM_1 (черт. 276) отрицательным, равным $-t_1$, где t_1 есть удвоенная площадь сектора AOM_1 , и положить

$$\text{sh}(-t_1) = -M_1P_1 = -\text{sh } t_1, \quad \text{ch}(-t_1) = OP_1 = \text{ch } t_1,$$

$$\text{th}(-t_1) = -N_1A = -\text{th } t_1,$$

то графики гиперболических функций будут иметь такой вид, как изображено на черт. 29. Заметим еще, что $\text{sh } 0 = \text{th } 0 = 0$, а $\text{ch } 0 = 1$ (аналогично тому, как $\sin 0 = \text{tg } 0 = 0$, $\cos 0 = 1$).



Черт. 29.

Выведем теперь основные зависимости между тригонометрическими (круговыми и гиперболическими) функциями.

Из подобия треугольников OMP и ONA (черт. 27а) следует:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Но $\frac{AN}{OA} = \text{tg } \alpha$ (ибо $OA = 1$),
а

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Таким образом, получаем:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (I)$$

Далее, координаты точки M окружности равны $OP = X$, $PM = Y$.

Из подобия треугольников OMP и ONA (черт. 27б) следует:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Но $\frac{AN}{OA} = \text{th } t$ (ибо $OA = 1$;
для точки A координата $Y = 0$,
а следовательно, $OA^2 = X^2 = 1 + Y^2 = 1$), а

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t}.$$

Таким образом, получаем:

$$\text{th } t = \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t}. \quad (I)$$

Далее, координаты точки M гиперболы равны $OP = X$, $PM = Y$.

Уравнение единичной окружности имеет вид $X^2 + Y^2 = 1$. Следовательно,

$$OP^2 + PM^2 = 1$$

или

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (II)$$

Разделив обе части тождества (II) сначала на $\cos^2 \alpha$, а затем на $\sin^2 \alpha$, мы получим еще две формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (III)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (IV)$$

Уравнение единичной гиперболы имеет вид $X^2 - Y^2 = 1$. Следовательно,

$$OP^2 - PM^2 = 1$$

или

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1. \quad (II)$$

Разделив обе части тождества (II) сначала на $\operatorname{ch}^2 t$, а затем на $\operatorname{sh}^2 t$, мы получим еще две формулы:

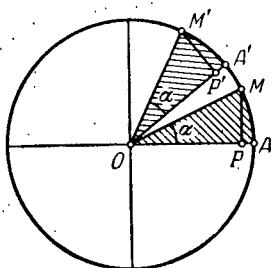
$$1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad (III)$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 t} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}. \quad (IV)$$

§ 3. Формулы сложения

Выведем теперь формулы сложения для круговых и гиперболических функций.

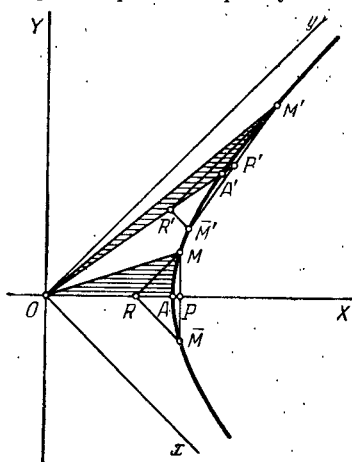
Пусть поворот вокруг точки O переводит радиусы OA и OM окружности (угол $AOM = \alpha$) в радиусы OA' и



Черт. 30а.

OM' (черт. 30а). Пусть далее линии PM и OP синуса и косинуса угла MOP перейдут при этом в отрезки $P'M'$ и OP' ; очевидно, $M'P'$ перпендикулярно диаметру

Пусть гиперболический поворот переводит радиусы OA



Черт. 30б.

и OM гиперболы (A — вершина гиперболы; гиперболи-

• OA' . Так как $P'M' = PM$ и $OP' = OP$ (при повороте длины отрезка не меняется), то равенства $\sin \alpha = PM$; $\cos \alpha = OP$ дают также

$$\sin \alpha = P'M'; \quad \cos \alpha = OP'.$$

ческий угол $AOM = t$ в радиусы OA' и OM' (черт. 306; см. сноску ¹⁾ на стр. 27). Пусть далее линии PM и OP (гиперболического) синуса и косинуса угла t перейдут при этом в отрезки $P'M'$ и OP' . Если $\bar{M}$ и $\bar{M}'$ — вторые точки пересечения MP и $M'P'$ с гиперболой, то $MP = P\bar{M}$ (так как OA — ось симметрии гиперболы) и $M'P' = P'\bar{M}'$ (вытекает из равенства $MP = P\bar{M}$ в силу свойства г) § 2 гл. I). Другими словами, хорды $\bar{M}\bar{M}'$ и $M'\bar{M}$ сопряжены соответственно диаметрам OP и OP' (см. выше, стр. 21).

Равенства $\text{sh } t = P$; $\text{ch } t = OP$ можно также записать в виде $\text{sh } t = \frac{PM}{OA}$, $\text{ch } t = \frac{OP}{OA}$ (ибо $OA = 1$; см. выше, стр. 29). Докажем, что также

$$\text{sh } t = \frac{P'M'}{OA'}, \quad \text{ch } t = \frac{OP'}{OA'}.$$

Проведем через точки M и $\bar{M}$, M' и $\bar{M}'$ прямые, параллельные асимптотам: $MR \parallel M'R' \parallel Oy$, $\bar{M}R \parallel \bar{M}'R' \parallel Ox$ (черт. 306). В силу свойства 4 § 3, гл. I точки R и R' принадлежат соответственно диаметрам OA и OA' . Так как

$$\begin{aligned} \angle MR\bar{M} &= \angle M'R'\bar{M}' = \\ &= \angle yOx = 90^\circ, \end{aligned}$$

то треугольники $MR\bar{M}$ и $M'R'\bar{M}'$ — прямоугольные.

Точки P и P' — середины гипотенуз этих треугольников; они одновременно являются центрами описанных около треугольников окружностей. Следовательно,

$$PM = \bar{MP} = RP,$$

$$P'M' = \bar{M}'P' = R'P'.$$

Теперь мы можем записать

$$\operatorname{sh} t = \frac{RP}{OA}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP}{OA}.$$

Но по свойству г) § 2 гл. I

$$\frac{RP}{OA} = \frac{R'P'}{OA'}; \quad \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}.$$

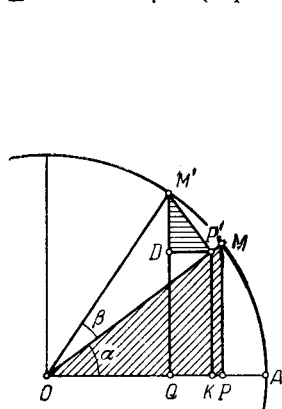
Следовательно,

$$\operatorname{sh} t = \frac{R'P'}{OA'} = \frac{P'M'}{OA'}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP'}{OA'},$$

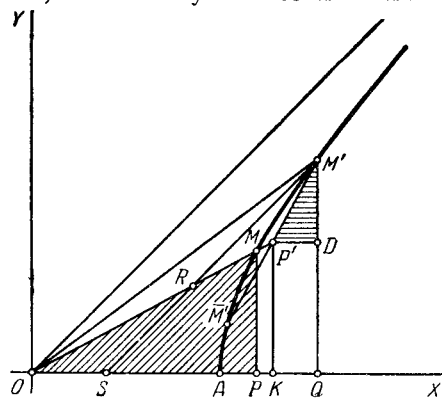
что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\angle AOM = \alpha$, $\angle MOM' = \beta$ (черт. 31а).

Пусть теперь гиперболические углы AOM и MOM'



Черт. 31а.



Черт. 31б.

Опустим из точек M и M' перпендикуляры MP и $M'Q$ на OA ; далее, из точки M'

равны соответственно t и u (черт. 31б). Опустим из точек M и M' перпендикуляры

опустим перпендикуляр $M'P'$ на OM и из точки P' перпендикуляры $P'D$ на $M'Q$ и $P'K$ на OA . В таком случае имеем:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= PM, & \cos \alpha &= OP; \\ \sin \beta &= P'M', & \cos \beta &= OP'; \\ \sin(\alpha + \beta) &= QM', \\ \cos(\alpha + \beta) &= OQ.\end{aligned}$$

Треугольники OMP и $OP'K$ подобны: оба они прямоугольные и имеют общий угол.

Треугольники OMP и $M'P'D$ тоже подобны: оба эти треугольника прямоугольные и $\angle MOP = \angle P'M'D$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Очевидно (черт. 31а),

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= QM' = \\ &= KP' + DM', \\ \cos(\alpha + \beta) &= OQ = \\ &= OK - DP'.\end{aligned}$$

MP и $M'Q$ на OA ; далее, из точки M' проведем хорду $M'\bar{M}'$, сопряженную OM (см. выше, стр. 21), $M'\bar{M}'$ пересекает OM в точке P' ; из точки P' опустим перпендикуляры $P'D$ на $M'Q$ и $P'K$ на OA . В таком случае имеем:

$$\begin{aligned}\text{sh } t &= PM, & \text{ch } t &= OP; \\ \text{sh } u &= \frac{P'M'}{OM}, & \text{ch } u &= \frac{OP'}{OM}; \\ \text{sh}(t + u) &= QM', \\ \text{ch}(t + u) &= OQ.\end{aligned}$$

Треугольники OMP и $OP'K$ подобны: оба они прямоугольные и имеют общий угол.

Треугольники OMP и $M'P'D$ тоже подобны. Оба они прямоугольные и $\angle MOP = \angle P'M'D$. Действительно, прямая $M'R$, параллельная асимптоте Оу гиперболы, пересекает диаметр OM в точке R и ось OA в точке S . Тогда $\angle QM'S = \angle QSM' = 45^\circ$. Далее $\angle P'M'R = \angle M'RP'$, так как $P'M' = RP'$ (см. выше, стр. 32). Но $\angle MOP = \angle M'SQ - \angle SRO = \angle M'SQ - \angle M'RP'$, $\angle P'M'D = \angle SM'Q - \angle RM'P'$, следовательно,

$$\angle MOP = \angle P'M'D.$$

Очевидно (черт. 31б),

$$\begin{aligned}\text{sh}(t + u) &= QM' = \\ &= KP' + DM', \\ \text{ch}(t + u) &= OQ = OK + P'D.\end{aligned}$$

Из подобия треугольников OMP и $OP'K$ следует:

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM}, \quad KP' = \frac{OP'}{OM} PM;$$

$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM}, \quad OK = \frac{OP'}{OM} OP.$$

Из подобия треугольников OMP и $M'P'D$ следует:

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM}, \quad DM' = \frac{P'M'}{OM} OP,$$

$$\frac{DP'}{P'M'} = \frac{PM}{OM}, \quad DP' = \frac{P'M'}{OM} PM.$$

Учитывая теперь, что $PM = \sin \alpha$, $OP = \cos \alpha$;

$$\frac{P'M'}{OM} = \sin \beta, \quad \frac{OP'}{OM} = \cos \beta,$$

окончательно имеем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (V)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (VI)$$

Из формулы (V), (VI) и формул (I), (II) предыдущего параграфа вытекают уже все остальные формулы тригонометрии. Так, например, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}. \end{aligned}$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей справа, на $\cos \alpha \cos \beta$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (VII)$$

Из подобия треугольников OMP и $OP'K$ следует:

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM}, \quad KP' = \frac{OP'}{OM} PM;$$

$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM}, \quad OK = \frac{OP'}{OM} OP.$$

Из подобия треугольников OMP и $M'P'D$ следует:

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM}, \quad DM' = \frac{P'M'}{OM} OP;$$

$$\frac{P'D}{P'M'} = \frac{PM}{OM}, \quad P'D = \frac{P'M'}{OM} PM.$$

Учитывая теперь, что $PM = \operatorname{sh} t$, $OP = \operatorname{ch} t$;

$$\frac{P'M'}{OM} = \operatorname{sh} u, \quad \frac{OP'}{OM} = \operatorname{ch} u,$$

окончательно имеем:

$$\operatorname{sh}(t + u) = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} u + \operatorname{ch} t \operatorname{sh} u, \quad (V)$$

$$\operatorname{ch}(t + u) = \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u. \quad (VI)$$

Из формул (V), (VI) и формул (I), (II) предыдущего параграфа можно получить все остальные формулы гиперболической тригонометрии. Так, например, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(t + u) &= \frac{\operatorname{sh}(t + u)}{\operatorname{ch}(t + u)} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} u + \operatorname{ch} t \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u}. \end{aligned}$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей справа, на $\operatorname{ch} t \operatorname{ch} u$, получим:

$$\operatorname{th}(t + u) = \frac{\operatorname{th} t + \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th} t \operatorname{th} u}. \quad (VII)$$

Если $\beta = \alpha$, то формулы (V), (VI) и (VII) примут вид

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad (\text{VIII})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (\text{IX})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (\text{X})$$

Из формул (V), (VI) находим:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \\ &\quad - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \\ &\quad + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta. \end{aligned}$$

Последние формулы, если в них заменить $\alpha + \beta$ на α и α на $\alpha - \beta$, примут вид

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \\ &\quad - \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (\text{XI}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \\ &\quad + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (\text{XII}) \end{aligned}$$

Разделив почленно формулу (XI) на (XII), получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{XIII})$$

Выразим еще $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ через тангенс половинного угла. Из формул (VIII) — (X) и (III) следует:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (\text{XIV})$$

Если $u = t$, то формулы (V), (VI) и (VII) примут вид:

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad (\text{VIII})$$

$$\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t, \quad (\text{IX})$$

$$\operatorname{th} 2t = \frac{2 \operatorname{th} t}{1 + \operatorname{th}^2 t}. \quad (\text{X})$$

Из формул (V), (VI) находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} t &= \operatorname{sh}(t + u) \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{ch}(t + u) \operatorname{sh} u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} t &= \operatorname{ch}(t + u) \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{sh}(t + u) \operatorname{sh} u. \end{aligned}$$

Последние формулы, если в них заменить $t + u$ на t и t на $t - u$, примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(t - u) &= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} u, \quad (\text{XI}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(t - u) &= \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u. \quad (\text{XII}) \end{aligned}$$

Разделив почленно формулу (XI) на (XII), получим:

$$\operatorname{th}(t - u) = \frac{\operatorname{th} t - \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} t \operatorname{th} u}. \quad (\text{XIII})$$

Выразим еще $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{th} t$ через (гиперболический) тангенс половинного угла. Из формул (VIII) — (X) и (III) следует:

$$\operatorname{sh} t = 2 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \operatorname{ch} \frac{t}{2} =$$

$$= 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2}} \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} = 2 \operatorname{th} \frac{t}{2} \times$$

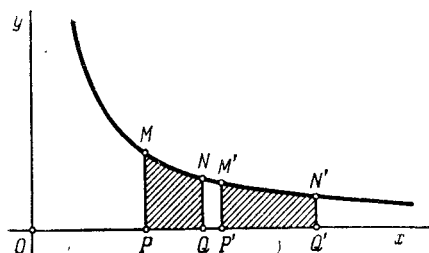
$$\times \frac{1}{1/\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}, \quad (\text{XIV})$$

ГЛАВА III

СВЯЗЬ С ЛОГАРИФМАМИ

§ 1. Геометрическая теория логарифмов

Рассмотрим гиперболу $xy = 1$ (черт. 33). Возьмем на этой гиперболе две произвольные точки M и N и опустим из них перпендикуляры MP и NQ на ось x . Рассмотрим криволинейную трапецию $PQNM$ ¹⁾. Площадь S_{PQNM} этой



Черт. 33.

трапеции зависит от абсцисс $OP = x_1$ и $OQ = x_2$ точек M и N ($x_2 > x_1$). Выясним, как именно зависит S_{PQNM} от x_1 и x_2 , т. е. как вычислить эту площадь, зная x_1 и x_2 .

Докажем прежде всего, что *площадь S_{PQNM} зависит только от отношения $\frac{x_2}{x_1}$* . Другими словами, покажем, что если две криволинейные трапеции $PQNM$ ($OP = x_1$, $OQ = x_2$)

¹⁾ Криволинейной трапецией будем называть фигуру, ограниченную двумя ординатами (абсциссами), отрезком оси абсцисс (ординат), заключенным между указанными ординатами (абсциссами) и дугой кривой линии.

и $P'Q'N'M'$ ($OP' = x_1'$, $OQ' = x_2'$) таковы, что

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{x_1'},$$

то площади этих трапеций равны (черт. 33). Произведем гиперболический поворот, переводящий MP в $M'P'$. В силу свойств г) § 2 гл. I точка Q перейдет в такую точку $\bar{Q}$, что $\frac{O\bar{Q}}{OP'} = \frac{OQ}{OP}$, т. е. в точку Q' (ибо $\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{x_2}{x_1}$). Это значит, что NQ

перейдет в $N'Q'$ и криволинейная трапеция $PQNM$ — в криволинейную трапецию $P'Q'N'M'$. А следовательно, согласно свойству д) § 2 гл. I $S_{PQNM} = S_{P'Q'N'M'}$.

Итак, мы видим, что площадь S_{PQNM} зависит лишь от отношения $\frac{x_2}{x_1} = z$, т. е. является функцией от z . Обозначим эту функцию через $S(z)$:

$$S_{PQNM} = S\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = S(z).$$

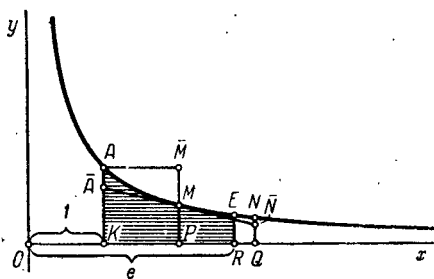
Очевидно, $S(z)$ есть площадь трапеции, ограниченной гиперболой, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = z$ (ибо $\frac{z}{1} = z$).

Функция $S(z)$ определена для всякого z , большего 1. Из геометрического смысла ее следует, что это есть функция, возрастающая (если $z_1 > z_2$, то $S(z_1) > S(z_2)$) и непрерывная (близким значениям z отвечают близкие по величине значения $S(z)$). Естественно считать, что $S(1) = 0$ (трапеция вырождается в отрезок). Для достаточно больших z выражение $S(z)$ может быть сделано сколь угодно большим (доказательство этого в точности аналогично доказательству того, что гиперболический угол может быть сколь угодно велик; см. выше, стр. 28). Отсюда вытекает, что существует такое число $z > 1$, что $S(z) = 1$. Это число в дальнейшем будет играть значительную роль; мы обозначим его через e . Итак $S(e) = 1$ (черт. 34).

Найдем теперь формулу для функции $S(z)$. Докажем прежде всего, что для любых двух чисел z_1 и z_2 , больших единицы,

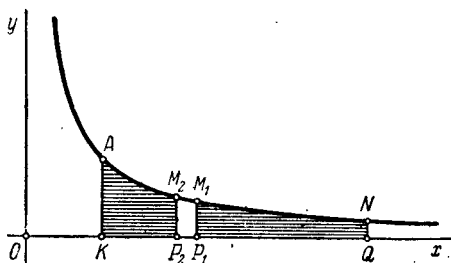
$$S(z_1) + S(z_2) = S(z_1 z_2)$$

(если, например, $z_1 = 1$, то это соотношение становится очевидным, так как $S(1) = 0$).



Черт. 34.

Действительно, $S(z_1)$ есть площадь криволинейной трапеции KP_1M_1A , где $OK = 1$, $OP_1 = z_1$ (черт. 35); $S(z_2)$ —



Черт. 35.

площадь криволинейной трапеции KP_2M_2A , где $OP_2 = z_2$, или равная ей площадь криволинейной трапеции P_1QNM_1 , где $OQ = z_1z_2$ (ибо $\frac{z_1z_2}{z_1} = z_2$). Отсюда непосредственно следует:

$$S(z_1) + S(z_2) = S_{KP_1M_1A} + S_{P_1QNM_1} = S_{KQNA} = S(z_1z_2),$$

что нам и надо было доказать.

Воспользовавшись полученным соотношением, можно показать, что для всякого положительного числа α

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z).$$

Рассмотрим отдельно ряд случаев.

Если $\alpha = n$ — целое число, то последовательно получаем:

$$\begin{aligned} S(z^n) &= S(z \cdot z^{n-1}) = S(z) + S(z^{n-1}) = S(z) + S(z \cdot z^{n-2}) = \\ &= 2S(z) + S(z^{n-2}) = 2S(z) + S(z \cdot z^{n-3}) = \\ &= 3S(z) + S(z^{n-3}) = \dots = (n-2)S(z) + S(z^2) = \\ &= (n-2)S(z) + S(z \cdot z) = nS(z). \end{aligned}$$

Если $\alpha = \frac{1}{m}$, где m — целое, то по доказанному имеем:

$$S(z) = S[(z^{\frac{1}{m}})^m] = mS(z^{\frac{1}{m}}), \text{ откуда } S(z^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} S(z).$$

Если $\alpha = \frac{m}{n}$ рационально, то по доказанному имеем:

$$S(z^{\frac{n}{m}}) = S[(z^{\frac{1}{m}})^n] = nS(z^{\frac{1}{m}}) = n \cdot \frac{1}{m} S(z) = \frac{n}{m} S(z).$$

Наконец, если α — иррационально, то z^α определяется как предел чисел $z^{\frac{n_1}{m_1}}, z^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, z^{\frac{n_k}{m_k}}, \dots$, где рациональные дроби $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}, \dots$ стремятся к числу α .

А так как по доказанному $S(z^{\frac{n_1}{m_1}}) = \frac{n_1}{m_1} S(z)$, $S(z^{\frac{n_2}{m_2}}) = \frac{n_2}{m_2} S(z)$, $\dots$, $S(z^{\frac{n_k}{m_k}}) = \frac{n_k}{m_k} S(z)$, $\dots$, то в пределе получаем, что и в этом случае ¹⁾

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z).$$

Пусть теперь z — произвольное число, большее единицы. Очевидно, $z = e^{\log_e z}$, где $\log_e z$ — логарифм числа z при основании e . Так как $e > 1$ (см. стр. 38) и $\log_e z > 0$ (ибо $z > 1$), то имеем:

$$S(z) = S(e^{\log_e z}) = \log_e z \cdot S(e) = \log_e z,$$

($S(e) = 1$ по определению числа e).

Итак, окончательно имеем:

$$S(z) = \log_e z.$$

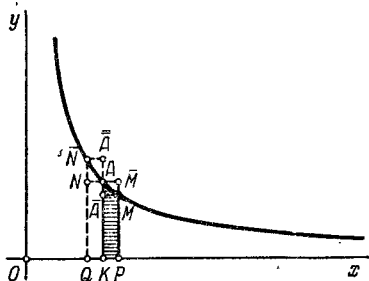
¹⁾ Здесь используется непрерывность функции $S(z)$,

Это и есть та формула, которую мы хотели получить. Из нее следует, что площадь криволинейной трапеции $PQNM$, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ ($x_2 > x_1$) равна $\log_e \frac{x_2}{x_1}$.

Таким образом, из геометрических рассуждений, связанных с площадями, мы неожиданно пришли к логарифмам. При этом основание системы логарифмов равно некоторому определенному числу e , а не произвольно, как это имеет место при обычном введении логарифмов. Это обстоятельство проливает свет на то, почему создатели теории логарифмов Непер и Бюрги независимо друг от друга пришли к логарифмам по одному и тому же основанию e (а не по основанию 10, что было бы, казалось, проще всего). Это же «геометрическое» определение логарифмов связано с тем, что логарифмы по основанию e часто появляются в вопросах математики и физики, на первый взгляд не имеющих никакого отношения к логарифмической функции¹⁾.

Оценим число e . Площадь $S(2)$ криволинейной трапеции $KPMA$ ($OK = 1$, $OP = 2$) меньше площади прямоугольника $K\bar{P}\bar{M}A$, равного $KA \cdot KP = 1 \cdot 1 = 1$ (см. черт. 34); таким образом, $S(2) < 1$. С другой стороны, площадь $S(3)$ криволинейной трапеции $KQNA$ ($OQ = 3$) больше площади трапеции $KQ\bar{N}A$ ($\bar{AN}$ — касательная к гиперболе в точке M), равной $PM \cdot KQ = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$; таким образом, $S(3) > 1$. Из неравенств $S(2) < 1 < S(3)$ следует²⁾, что

$$2 < e < 3.$$



Черт. 36.

Можно оценить число e еще точнее. Рассмотрим криволинейную трапецию $KPMA$, где $OK = 1$, $OP = 1 + \frac{1}{n}$ (черт. 36).

¹⁾ Истории логарифмов посвящена популярная книга И. Б. Абелясон, Рождение логарифмов, Гостехиздат, М. — Л., 1948. См. также брошюру А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы, Гостехиздат, М. — Л., 1952. (Популярные лекции по математике, вып. 9).

²⁾ Здесь использовано, что функция $S(z)$ — возрастающая.

Площадь этой трапеции, равная по доказанному выше $\log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, заключается между площадями прямоугольников $K\overline{P}MA$ и $KPM\overline{A}$, изображенных на черт. 36, т. е. между $KA \cdot KP = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ и $KP \cdot PM = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} : \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}$. Итак,

$$\frac{1}{n} > \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда получаем:

$$1 > n \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$1 < (n+1) \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Из неравенств $\log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 < \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ следует, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Эти последние неравенства позволяют оценить e с любой степенью точности: надо лишь положить в них n достаточно большим. Так, например, положив $n = 100$, получаем:

$$2,704 < \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} < e < \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{101} < 2,732,$$

откуда

$$e \approx 2,7.$$

Из неравенств $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и того, что при $n \rightarrow \infty$ отношение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{n}$ стремится к 1, следует:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (*)$$

Эту формулу часто принимают за определение числа e .

Отметим еще, что формула (*) может быть обобщена следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a. \quad (**)$$

Доказательство формулы (**) почти не отличается от вывода формулы (*). Предположим, что на черт. 36 $OP = 1 + \frac{a}{n}$, a — положительно. В таком случае имеем $S_{KPM\bar{A}} = \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right)$,

$$S_{KPM\bar{A}} = KA \cdot KP = 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n}$$

и

$$S_{KPM\bar{A}} = KP \cdot PM = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{n}} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{n + a} = \frac{a}{n + a},$$

откуда

$$\frac{a}{n} > \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right) > \frac{a}{n + a}.$$

Далее в точности, как выше, получаем:

$$a > n \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right) = \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n,$$

$$a < (n + a) \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right) = \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+a},$$

т. е.

$$\log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n < a < \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+a}$$

или

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n < e^a < \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+a}.$$

Из последних неравенств и из того, что при $n \rightarrow \infty$ отношение $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+a} : \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^a$ стремится к 1, вытекает формула (**).

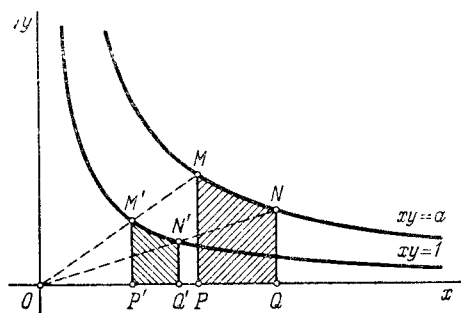
Совершенно аналогично можно доказать, что формула (**) справедлива и для отрицательных a . Пусть на черт. 36 $OQ = 1 - \frac{a}{n}$, где $a > 0$. В таком случае $S_{QKAN} = \log_e \frac{OK}{OQ} = \log_e \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} = -\log_e \left(1 - \frac{a}{n}\right)$ заключается между $S_{QKAN} = 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n}$ и $S_{QK\bar{A}\bar{N}} =$

$$= \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} = \frac{a}{n-a}. \text{ Отсюда в точности, как выше, выводится,}$$

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

Выясним в заключение, чему равна площадь трапеции $PQNM$, ограниченная произвольной гиперболой $xy = a$, осью абсцисс и прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ (черт. 37) Произ-



Черт. 37.

ведем сжатие к началу координат (гомотетию) с коэффициентом $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$ (см. выше, стр. 5). При этом гипербола $xy = a$ перейдет в гиперболу $xy = 1$ (точка с координатами (x, y) перейдет в точку с координатами $(\frac{1}{\sqrt{a}}x, \frac{1}{\sqrt{a}}y)$), а кривая $xy = a$ — в кривую $xy = 1$; криволинейная трапеция $PQNM$ перейдет в криволинейную трапецию $P'Q'N'M'$. Но, как мы уже знаем,

$$S_{P'Q'N'M'} = \log_e \left(\frac{OQ'}{OP'} \right);$$

с другой стороны, в силу свойств сжатия к точке (см. стр. 5—7),

$$S_{P'Q'N'M'} = k^2 S_{PQNM} = \frac{1}{a} S_{PQNM}, \quad \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Отсюда получаем:

$$S_{PQNM} = a \log_e \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

В частности, если $a = \lg e \approx 0,43$ — десятичный логарифм числа e , то мы получаем:

$$S_{PQNM} = \lg e \cdot \log_e \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \lg \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

(из равенства $z = e^{\lg e^z} = (10^{\lg e})^{\lg e^z} = 10^{\lg e \lg e^z}$ и $z = 10^{\lg z}$ следует, что $\lg z = \lg e \cdot \lg e^z$. Таким образом, десятичный логарифм числа z можно определить как площадь криволинейной трапеции $KPMA$, ограниченной гиперболой $xu = \lg e \approx 0,43$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = z$ («геометрическое определение десятичных логарифмов»).

§ 2. Аналитические выражения для гиперболических функций

Рассмотрим снова единичную гиперболу $X^2 - Y^2 = 1$. Пусть M есть произвольная точка этой гиперболы; угол (гиперболический) AOM равен t (черт. 38). Координаты точек M и A в системе координат, оси которой совпадают с осями гиперболы, очевидно, равны соответственно $OP = \operatorname{ch} t$; $PM = \operatorname{sh} t$ и $OA = 1$; 0. Координаты этих же точек в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами гиперболы, определяются по формулам (*) § 1 гл. II (стр. 25) и равны соответственно

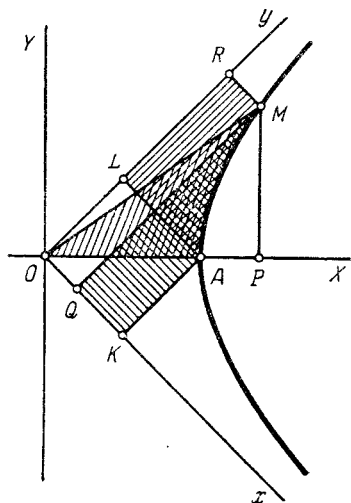
$$OQ = (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OR = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и

$$OK = (1 - 0) \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OL = (1 + 0) \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Черт. 38.

Далее нетрудно видеть, что площади криволинейных трапеций $QKAM$ и $RLAM$ равны между собой и равны площади гиперболического сектора OAM . Действительно, по определению гиперболы (см. выше, стр. 13) площади координатных прямоугольников точек M и A равны $S_{OQMR} = S_{OKAL}$. Следовательно, $S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{OKAL} + S_{OQMR} = S_{RLAM}$. С другой стороны, $S_{\Delta MOQ} = S_{\Delta AOK}$ (ибо $S_{\Delta MOQ} = \frac{1}{2} S_{OQMR}$, $S_{\Delta AOK} = \frac{1}{2} S_{OKAL}$).

Отсюда имеем:

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{\Delta AOK} + S_{\Delta MOQ} = S_{OAM}.$$

Но так как по определению гиперболического угла $S_{OAM} = \frac{1}{2}t$, то

$$S_{QKAM} = S_{RLAM} = \frac{1}{2}t.$$

Так как единичная гипербола в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, имеет уравнение $xy = \frac{1}{2}$ (стр. 25), то (см. конец предыдущего параграфа)

$$\begin{aligned} S_{QKAM} &= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{OK}{OQ} \right) = \frac{1}{2} \log_e \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \log_e (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t &= -\frac{1}{2} \log_e (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t), \\ -t &= \log_e (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t). \end{aligned} \quad (*)$$

Аналогично имеем:

$$\begin{aligned} S_{OAM} &= S_{RLAM} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{OR}{OL} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log_e \frac{(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \log_e (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t), \end{aligned}$$

откуда

$$t = \log_e (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t). \quad (**)$$

Формулами (*) и (**) устанавливается связь между гиперболическими функциями и логарифмами при основании e . Из этих формул получаем:

$$\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}, \quad \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^t;$$

следовательно,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad (1)$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (2)$$

Так как $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, то имеем:

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \quad (3)$$

Это и есть аналитические выражения для гиперболических функций; ими обыкновенно и определяют гиперболические функции в курсе высшей школы. Из этих трех формул легко вывести все формулы гиперболической тригонометрии.

Так, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1, \end{aligned} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch} 2t, \end{aligned} \quad (IX)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t &= 2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \\ &= \frac{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})}{2} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \operatorname{sh} 2t, \end{aligned} \quad (VIII)$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}} &= \frac{2 \frac{\frac{t}{2} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}}{1 - \left[\frac{\frac{t}{2} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} \right]^2} = \\ &= \frac{2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) \cdot (e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2}{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}) [(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2 - (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})^2]} = \\ &= \frac{2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})}{4} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t. \end{aligned} \quad (XIV)$$

Аналогично можно вывести и другие формулы.

Для того чтобы получить из формул (1) — (2) дальнейшие следствия, преобразуем формулу (* *) предыдущего параграфа (стр. 43):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Согласно формуле бинома Ньютона имеем:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \frac{a}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{a^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{a^3}{n^3} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!} \frac{a^n}{n^n} = 1 + \frac{a}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{a^2}{2!} + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{a^3}{3!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{a^n}{n!} = \\ &= 1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, \end{aligned}$$

где

$$u_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{a^k}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Отбросим теперь в сумме $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ все члены $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$ после некоторого члена u_k . Сделанная при этом ошибка будет равна

$$u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \dots + u_n.$$

Но из определения величин u_n следует:

$$\begin{aligned} |u_k| &\leq \frac{|a|^k}{k!}, \\ |u_{k+1}| &= \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{|a|}{k+1} |u_k| < \frac{|a|}{k+1} |u_k|, \\ |u_{k+2}| &= \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \frac{|a|}{k+2} |u_{k+1}| < \frac{|a|}{k+1} |u_{k+1}| < \frac{|a|^2}{(k+1)^2} |u_k|, \\ |u_{k+3}| &= \left(1 - \frac{k+2}{n}\right) \frac{|a|}{k+3} |u_{k+2}| < \frac{|a|}{k+1} |u_{k+2}| < \frac{|a|^3}{(k+1)^3} |u_k|, \\ &\dots \end{aligned}$$

(вертикальные черточки $| |$ — знак абсолютной величины числа). Поэтому сумма $u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n$ по абсолютной величине не превосходит выражения

$$\begin{aligned} |u_k| \frac{|a|}{k+1} + |u_k| \frac{|a|^2}{(k+1)^2} + |u_k| \frac{|a|^3}{(k+1)^3} + \dots + |u_k| \frac{|a|^{n-k}}{(k+1)^{n-k}} = \\ = |u_k| \frac{\frac{|a|}{k+1} - \frac{|a|^{n-k+1}}{(k+1)^{n-k+1}}}{1 - \frac{|a|}{k+1}}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $k+1 > |a|$ (мы считаем, что n достаточно велико, чтобы можно было выбрать k таким образом). В таком случае последнее выражение меньше, чем

$$|u_k| \frac{\frac{|a|}{k+1}}{1 - \frac{|a|}{k+1}} = |u_k| \frac{|a|}{k+1 - |a|} \leq \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1 - |a|}$$

$$\left(\text{ибо } u_k \leq \frac{|a|^k}{k!} \right).$$

Таким образом, заменив $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ суммой $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k$, мы сделаем ошибку по абсолютной величине, не превосходящую $\frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1 - |a|)}$, т. е. при любом n , большем k

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k) \right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1 - |a|)}.$$

Перейдем теперь в последнем выражении к пределу $n \rightarrow \infty$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

(формула (*), стр. 43) и

$$u_1 = \frac{a}{1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_2 = \frac{a^2}{2!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_3 = \frac{a^3}{3!}, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_k = \frac{a^k}{k!}$$

(см. формулу, определяющую величину u_k), то получим:

$$\left| e^a - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}\right) \right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1 - |a|)}.$$

Перейдем теперь в этом выражении к пределу при $k \rightarrow \infty$. Докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1 - |a|)} = 0.$$

Обозначим

$$\frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1 - |a|)} = V_k.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} V_{k+l} &= \frac{|a|^{k+l+1}}{(k+l)!(k+l+1 - |a|)} = \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1 - |a|)} \times \\ &\times \frac{k+1 - |a|}{k+l+1 - |a|} \cdot \frac{|a|^l}{(k+1)(k+2) \dots (k+l)} < V_k \cdot \frac{|a|^l}{(k+1)^l} \end{aligned}$$

(множитель $\frac{k+1-|a|}{k+l+1-|a|}$, меньший единицы, мы просто отбросили, а в множителе $\frac{|a|^l}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)}$ заменили все множители знаменателя на $k+1$). Но мы уже предполагали, что $k+1 > |a|$; таким образом, отношение $\frac{|a|}{k+1} = \alpha$ меньше 1. Из того, что

$$V_{k+l} < V_k \alpha^l, \quad \alpha < 1$$

следует, что $V_{k+l} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, или

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 0.$$

Окончательно формула

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!} \right) \right| < V_k$$

дает:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| e^a - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!} \right) \right| = 0,$$

или

$$e^a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!} \right).$$

Итак, e^a равно сумме бесконечного ряда

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \quad (***)$$

Это и есть та формула, которую мы хотели получить.

Подставив в формулу (***) $a = t$ и $a = -t$, имеем:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots,$$

$$e^{-t} = 1 - \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

Учитывая теперь формулы (1) и (2), получим:

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots, \quad (4)$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{t}{1} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) позволяют вычислить значения $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ (а следовательно, и $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$) для каждого фиксированного t с любой степенью точности; для этого следует взять достаточно много членов соответствующих бесконечных рядов. В частности, с помощью этих формул составляются таблицы гиперболических функций.

§ 3. Формулы Эйлера

В школьном курсе алгебры определяется вещественная степень числа; выражения типа 2^i или e^{2-4i} пока для нас никак не определены и поэтому должны считаться бессмысленными. Определим теперь любую комплексную степень a числа e формулой (**), стр. 43:

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n. \quad (**)$$

Для того чтобы вычислить этот предел, воспользуемся формулой Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Если $a = \beta + i\alpha$, β, α — действительны, то

$$1 + \frac{a}{n} = \left(1 + \frac{\beta}{n}\right) + i \frac{\alpha}{n} = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n),$$

где

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}}$$

(черт. 39). Отсюда получаем:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = r_n^n (\cos n\varphi_n + i \sin n\varphi_n),$$

и, следовательно,

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = R (\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

где

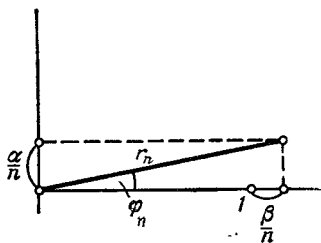
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n, \quad \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\varphi_n).$$

Определим теперь R и Φ . Имеем:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}} \right)^n.$$

Сравним это выражение с

$$\begin{aligned} e^\beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}} \right)^n \end{aligned}$$



Черт. 39.

(см. формулу (* *)). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{R}{e^{\beta}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{n^2}} \right)^n}{\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n. \end{aligned}$$

Но при $\beta \geq 0$ и достаточно больших n имеем:

$$1 \leq \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \right)^n &\geq \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n = \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2}} \right)^n > \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}} \right)^n, \quad (a) \end{aligned}$$

и нам остается только оценить выражения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{2n}}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Воспользуемся теперь тем, что при больших n в силу формулы (* *)

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{n^2} \approx e^{\alpha^2} \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2} \right)^{n^2} \approx e^{\frac{4\alpha^2}{9}}.$$

А: так как¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{\alpha}{2n}})^{\frac{1}{2n}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{4\alpha^2}{9}})^{\frac{1}{2n}} = 1,$$

то оба интересующих нас предела должны быть равны 1.

В случае $\beta < 0$ и достаточно больших n

$$1 \geq \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 > \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

и в формуле, аналогичной формуле (а), знаки неравенств надо заменить на противоположные. Дальнейшее доказательство остается прежним.

Таким образом, при любом β

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}] \right)^n = 1$$

и, значит,

$$\frac{R}{e^\beta} = 1, \quad R = e^\beta.$$

Перейдем теперь к определению Φ . Имеем:

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} \cdot n \operatorname{tg} \varphi_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} \right).$$

Но $\varphi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (ибо при этом $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}} \rightarrow 0$). Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi = 1,$$

ибо

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1.$$

¹⁾ Это вытекает, например, из того, что для каждого числа a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\log a^{\frac{1}{2n}}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a}{2n} \rightarrow 0;$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{2n}} = 1.$$

А так как, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}} = \alpha,$$

то

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} \right) = \alpha.$$

Итак, $R = e^{\beta}$, $\Phi = \alpha$ и, следовательно,

$$e^{\beta + i\alpha} = e^{\beta} (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Теперь мы можем убедиться, что наше определение комплексной степени e^a числа e является удачным. Действительно, это определение удовлетворяет двум основным требованиям, которые можно было бы заранее предъявить ему:

1°. При a действительном это определение совпадает с обычным (ибо для действительных a формула $(*)$ была доказана нами выше).

2°. Так определенные комплексные степени удовлетворяют основному правилу действий над степенями числа

$$e^{a_1} \cdot e^{a_2} = e^{a_1 + a_2}.$$

В самом деле, если $a_1 = \beta_1 + i\alpha_1$, $a_2 = \beta_2 + i\alpha_2$, то имеем:

$$\begin{aligned} e^{a_1} \cdot e^{a_2} &= e^{\beta_1 + i\alpha_1} \cdot e^{\beta_2 + i\alpha_2} = e^{\beta_1} (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot e^{\beta_2} (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = \\ &= e^{\beta_1} \cdot e^{\beta_2} \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = \\ &= e^{\beta_1 + \beta_2} [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2)] = e^{\beta_1 + \beta_2 + i(\alpha_1 + \alpha_2)} = e^{a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

Подставим в полученное выражение для e^a значения $a = i\alpha$ и $a = -i\alpha$. Мы будем иметь:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos \alpha + i \sin \alpha, \\ e^{-i\alpha} &= \cos \alpha - i \sin \alpha. \end{aligned}$$

Из этих двух формул немедленно вытекает

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad (1')$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad (2')$$

и следовательно, так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}. \quad (3')$$

Это и есть формулы Эйлера¹⁾, устанавливающие связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

1) Леонард Эйлер (1707—1783)—крупнейший математик XVIII века, член Российской Академии наук, жил и работал в Петербурге.

Из формул (1) и (2) можно получить дальнейшие следствия. Действительно, подставим в формулу (* * *) (стр. 50) значения $a = i\alpha$ и $a = -i\alpha$ ¹⁾. Мы будем иметь:

$$e^{i\alpha} = 1 + \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \dots,$$

$$e^{-i\alpha} = 1 - \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

Учитывая формулы (1') и (2'), получим отсюда:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots, \quad (4')$$

$$\sin \alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \quad (5')$$

Формулы (4') — (5') позволяют вычислять значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ (а следовательно, и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$) для каждого фиксированного α с любой степенью точности: для этого надо взять достаточно много членов соответствующих бесконечных рядов. В частности, с помощью этих формул составляются таблицы тригонометрических функций.

1) Вывод формулы (* * *) из формулы (* *) (см. выше, стр. 49—50) полностью сохраняет силу и для комплексных значений α (только здесь следует считать, что вертикальные черточки означают абсолютную величину или модуль комплексного числа, т. е. корень квадратный из суммы квадратов действительной части числа и коэффициента при мнимой части).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие	3
Глава I. Гиперболический поворот	5
§ 1. Сжатие к прямой	5
§ 2. Гиперболический поворот	12
§ 3. Несколько свойств гиперболы	16
Глава II. Гиперболические функции	24
§ 1. Уравнение гиперболы, отнесенной к осям	24
§ 2. Определение и основные свойства гиперболических функций	26
§ 3. Формулы сложения	30
Глава III. Связь с логарифмами	37
§ 1. Геометрическая теория логарифмов	37
§ 2. Аналитические выражения для гиперболических функций	45
§ 3. Формулы Эйлера	51



Цена 80 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

- Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
- Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
- Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
- Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
- Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
- Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
- Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
- Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
- Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
- Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
- Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
- Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
- Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
- Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
- Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
- Вып. 16. В. Г. Шерватов. Гиперболические функции.
-